Hong Kong Mathematics Olympiad (2011 / 2012)

Final Event 1 (Group)

香港數學競賽 (2011 / 2012)

決賽項目 1 (團體)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 求 2011^{2011} 的十位數。

Calculate the tens digit of 2011^{2011}.

2. 設 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ 為一等差級數，公差是 1 及 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=2012$。如果 $P=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{100}$，求 P 的值。

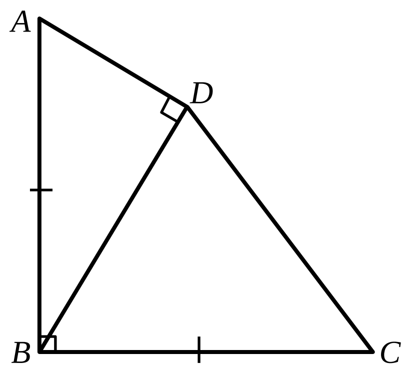
Let $a_1, a_2, a_3, \ldots$ be an arithmetic progression with common difference 1 and $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=2012$. If $P=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{100}$, find the value of P.

3. 若 $90!$ 可被 10^k 整除，當中 k 是正整數，求 k 的最大可能值。

If $90!$ is divisible by 10^k, where k is a positive integer, find the greatest possible value of k.

4. 在圖一中，ΔABC 是一直角三角形且 $AB \perp BC$。若 $AB = BC$，$AD = 5$ 及 $BD = 8$，求 ΔBCD 的面積的值。

In Figure 1, ΔABC is a right-angle triangle with $AB \perp BC$. If $AB = BC$, $AD = 5$ and $BD = 8$, find value of the area of ΔBCD.



圖一

Figure 1

Hong Kong Mathematics Olympiad (2011 / 2012)

Final Event 2 (Group)

香港數學競賽 (2011 / 2012)

決賽項目 2 (團體)

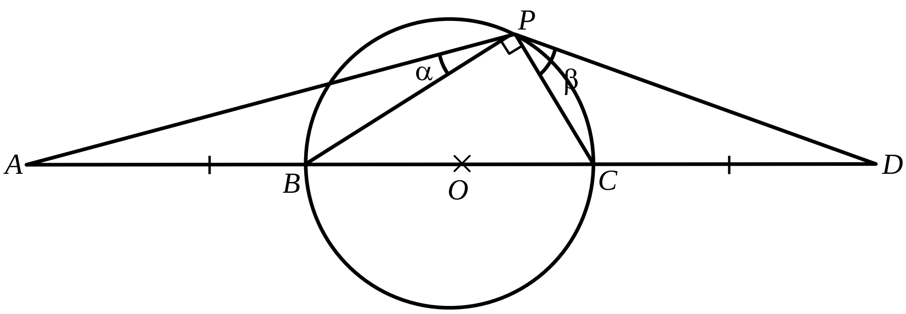
除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 求 $2\times\tan 1°\times\tan 2°\times\tan 3°\times\cdots\times\tan 87°\times\tan 88°\times\tan 89°$ 的值。
Find the value of $2\times\tan 1°\times\tan 2°\times\tan 3°\times\cdots\times\tan 87°\times\tan 88°\times\tan 89°$.

2. 若方程 $\left(x^2-3x+2\right)^2-3\left(x^2-3x\right)-4=0$ 有 K 個整數解，求 K 的值。
If there are K integers that satisfy the equation $\left(x^2-3x+2\right)^2-3\left(x^2-3x\right)-4=0$, find the value of K.

3. 若 ℓ 為 $|x-2|+|x-47|$ 的最小值，求 ℓ 的值。
If ℓ be the minimum value of $|x-2|+|x-47|$, find the value of ℓ.

4. 在圖一，圓有直徑 BC，圓心在 O，P、B 及 C 皆為圓周上的點。若 $AB=BC=CD$ 及 AD 為一線段，$\alpha=\angle APB$ 及 $\beta=\angle CPD$，求 $(\tan\alpha)(\tan\beta)$ 的值。
In Figure 1, P, B and C are points on a circle with centre O and diameter BC. If $AB=BC=CD$ and AD is a line segment, $\alpha=\angle APB$ and $\beta=\angle CPD$, find the value of $(\tan\alpha)(\tan\beta)$.



圖一

Figure 1

Hong Kong Mathematics Olympiad (2011 / 2012)

Final Event 3 (Group)

香港數學競賽 (2011 / 2012)

決賽項目 3 (團體)

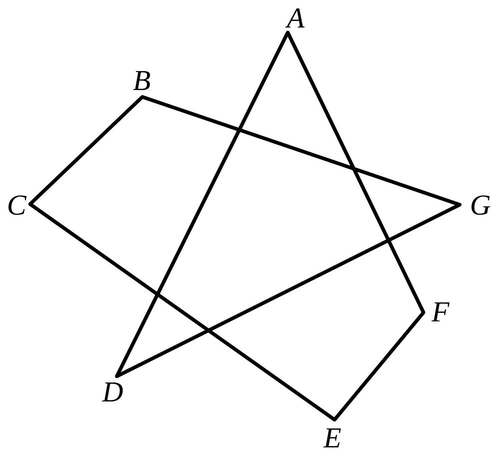
除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 設 $x=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ ，$y=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ 及 $192z=x^4+y^4+(x+y)^4$，求 z 的值。

   Let $x=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$, $y=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ and $192z=x^4+y^4+(x+y)^4$, find the value of z.

2. 在圖一中，AD 、 DG 、 GB 、 BC 、 CE 、 EF 及 FA 都是線段。若 $\angle FAD+\angle GBC+\angle BCE+\angle ADG+\angle CEF+\angle EFA+\angle DGB=r°$，求 r 的值。

   In Figure 1, AD, DG, GB, BC, CE, EF and FA are line segments. If $\angle FAD+\angle GBC+\angle BCE+\angle ADG+\angle CEF+\angle EFA+\angle DGB=r°$, find the value of r.



圖一
Figure 1

3. 設 k 為正整數及函數 $f(k)$ 的定義是若 $\frac{k-1}{k}=0.k_1k_2k_3\ldots\ldots$，則 $f(k)=\overline{k_1k_2k_3}$，例如 $f(3)=666$ 因為 $\frac{3-1}{3}=0.666\ldots\ldots$，求 $D=f\Big(f\Big(f\Big(f\big(f(112)\big)\Big)\Big)\Big)$ 的值。

Let k be a positive integer and $f(k)$ a function that if $\frac{k-1}{k}=0.k_1k_2k_3\ldots\ldots$, then $f(k)=\overline{k_1k_2k_3}$, for example, $f(3)=666$ because $\frac{3-1}{3}=0.666\ldots\ldots$, find the value of

$D=f\Big(f\Big(f\Big(f\big(f(112)\big)\Big)\Big)\Big)$.

4. 若 f 為一整數值函數，其定義為 $F_n(k)=F_1\big(F_{n-1}(k)\big)$，$n\geq 2$ 且 $F_1(k)$ 是 k 的所有位數的平方之和，求 $F_{2012}(7)$ 的值。

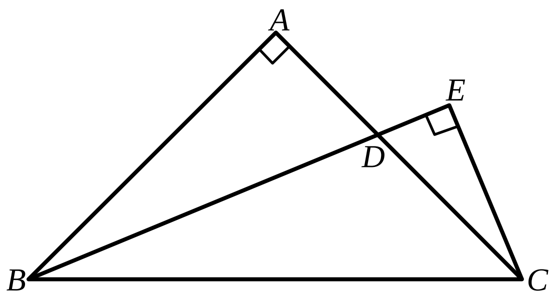
If f is an integer-valued function defined recursively by $F_n(k)=F_1\big(F_{n-1}(k)\big)$ for $n\geq 2$ where $F_1(k)$ is the sum of the squares of the digits of k, find the value of $F_{2012}(7)$.

Hong Kong Mathematics Olympiad (2011 / 2012)
Final Event 4 (Group)
香港數學競賽 (2011 / 2012)
決賽項目 4 (團體)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 在圖一中，ABC 及 EBC 是兩個直角三角形，$\angle BAC = \angle BEC = 90°$，$AB = AC$ 及 EDB 為 $\angle ABC$ 的角平分線。求 $\dfrac{BD}{CE}$ 的值。

In figure 1, ABC and EBC are two right-angle triangles, $\angle BAC = \angle BEC = 90°$, $AB = AC$ and EDB is the angle bisector of $\angle ABC$. Find the value of $\dfrac{BD}{CE}$.



圖一

Figure 1

2. 若 $Q > 0$ 並滿足 $\left|3Q - \left|1-2Q\right|\right| = 2$，求 Q 的值。

If $Q > 0$ and satisfies $\left|3Q - \left|1-2Q\right|\right| = 2$, find the value of Q.

3. 設 $xyzt=1$。若 $R=\frac{1}{1+x+xy+xyz}+\frac{1}{1+y+yz+yzt}+\frac{1}{1+z+zt+ztx}+\frac{1}{1+t+tx+txy}$，求 R 的值。

Let $xyzt=1$. If $R=\frac{1}{1+x+xy+xyz}+\frac{1}{1+y+yz+yzt}+\frac{1}{1+z+zt+ztx}+\frac{1}{1+t+tx+txy}$, find the value of R.

4. 若 x_1、x_2、x_3、x_4 與 x_5 為正整數並滿足 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=x_1x_2x_3x_4x_5$，即是，五數之和等於五數之乘積，求 x_5 的最大值。

If x_1, x_2, x_3, x_4 and x_5 are positive integers that satisfy $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=x_1x_2x_3x_4x_5$, that is, the sum is the product, find the maximum value of x_5.